IUT “A” de Lille
Département Informatique

Année Universitaire 2006/2007

Probabilités et Statistiques
Travaux Dirigés [1]

Serge Iovleff
Serge.Iovleff@univ-lille1.fr
http://www.iut-info.univ-lille1.fr/~iovleff/
Maximilien Bauer[2]
http://perso.univ-rennes1.fr/maximilian.bauer/

[1]Merci à Amélie Coulon, Maxence Cuvilliez et Adel Guerziz pour leurs apports à ces TD
[2]auteur d'une bonne partie des exercices de probabilités

Table des matières

Chapitre 1

Statistique Descriptive

1.1 Statistiques univariées

1.1.1 Variables qualitatives

Exercice 1 : A la question, "Les statistiques permettent de mentir avec assurance : Quelle est votre opinion ?", 80 personnes interrogées ont ainsi répondu :

Pas du tout d'accord	10
Plutôt d'accord	15
indifférente	12
Plutôt en accord	18
Tout à fait d'accord	25

Soit X la variable associée à cette enquête.

1. Quelles sont les modalités de X ? Quel est son type ? Quel est son mode ?
2. établir la distribution en fréquence de cette variable et représenter là par un diagramme rectangulaire, un diagramme en bâtons et un diagramme semi-circulaire.
3. Quelle est la proportion de sujets n'ayant pas d'opinion extrêmement tranchée sur la question ? Ayant une opinion extrêmement tranchée sur la question ?
4. Quelle est la proportion de sujets qui répondent négativement à la question ? Qui répondent positivement à la question ?

□

Exercice 2 : La répartition des jeunes âgés de 16 à 25 ans sans diplômes et résidant en Bretagne en 1999 selon leur sexe et leur activité est la suivante :

Type d'activité	**Hommes**	**Femmes**	**Total**
Actifs ayant un emploi	6 639	2 446	9 085
Chômeurs	2 544	1 850	4 394
Militaires du contingent	112	2	114
Inactifs	1 201	1 872	3 073
Total	10 496	6 170	16 666

TAB. 1.1 – *Source : Recensement Insee*

1. Quelle est la taille de la population des jeunes âgés de 16 à 25 ans résidants en Bretagne en 1999 ?
2. Quel est le type de la variable "Type d'activité ?

3. Quel est son mode ?
4. Quelle est la distribution de proportion (calculées au 1000ème près) parmi la population des femmes, parmi la population des hommes, parmi la population totale ?
5. Quelle est la proportion de jeunes actifs dans cette population ?
6. représenter graphiquement cette distribution.

□

Exercice 3 : Au cours d'une enquête de marketing, on étudie le statut marital des acheteurs d'une voiture Kangoo. On obtient la série suivante : où C=Célibataire, M=Mariée D=Divorcé

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X_i	C	M	D	V	V	M	D	M	M	C	D	M	D	M	C

TAB. 1.2 – *Statut Marital des acheteurs de Kangoo*

et V=veuf.

1. Quelle est la variable étudiée ? Quelles sont ses modalités ?
2. Construire la distribution des effectifs et la distribution des fréquences de cette variable.
3. Quel est le mode de cette variable ?
4. Représentez par un diagramme en bâton la distribution des fréquences par ordre décroissant.

□

1.1.2 Variables quantitatives

Variables quantitatives discrètes

Exercice 4 : Une population de ménages a été répartie en fonction du nombre de parts familiales permettant le calcul de l'impôt sur le revenu.

Nombre de Parts	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Nombre de Ménages	48	58	136	184	210	122	62	12

1. Calculer la proportion de ménages ayant plus de 2 parts familiales.
2. Donner une représentation graphique de cette population.
3. Représenter la courbe des fréquences cumulées croissantes.
4. Calculer la médiane, la moyenne et l'écart-type de cette variable.

□

Exercice 5 : Dans un grand magasin qui pratique le commerce des chaussures, on procède sur le mois à un relevé du nombre de chaussures vendues selon les pointures en vue d'améliorer la gestion du stock. On obtient le nombre de vente suivant :

Pointure	34	35	36	37	38	39	40
Effectif	10	20	30	131	241	122	112
Pointure	41	42	43	44	45	46	
Effectif	154	290	100	30	20	16	

1. Quelle est la population étudiée ? Quelle est la variable relevée ? On appellera X cette variable. Quel est son type ?
2. représenter la distribution de cette variable. Quel est son mode ? Existe t'il des modes secondaires ? Interpréter la distribution.
3. Calculer la moyenne et l'écart-type de cet échantillon en utilisant le changement de variable $X - 40$.

□

Variables quantitatives continues

Exercice 6 : On dispose pour tous les serveurs d'un centre informatique de leurs utilisations en temps CPU aux mois de décembre 95 et décembre 96.

Serveur	CPU 1995	CPU 1996
A	58 000	60 000
B	65 000	11 000
C	60 000	60 000
D	55 000	45 000
E	50 000	55 000
F	75 000	76 000

TAB. 1.3 – évolution du temps CPU des serveurs du centre

1. Quelle est la population étudiée ?
2. De quelle(s) variable(s) dispose t'on ?
3. On compare le temps CPU aux deux dates disponibles, et on définit la variable "évolution" qui vaut "SUP", "STABLE", "INF" selon que le temps d'utilisation d'un serveur a augmenté est restée identique ou a diminué entre les deux dates. Compléter le tableau 1.3 et indiquez le type de cette variable. En est-il de même si on code -1, 0, 1 la variable “évolution” selon l'évolution du CPU ?
4. Calculer la moyenne du CPU de ces serveurs de en 95 et 96. Cela contredit il la variable "évolution" ?

□

Exercice 7 : Le tableau 1.4 résulte de l'étude du montant du loyer mensuel hors charges de 1000 grands appartements parisiens de même superficie.

Montant des loyers	Effectifs
[500 - 1 000 [	30
[1 000 - 1 500 [	60
[1 500 - 2 000 [	80
[2 000 - 2 500 [	90
[2 500 - 3 000 [	150
[3 000 - 3 500 [	180
[3 500 - 4 000 [	150
[4 000 - 5 000 [	140
[5 000 - 6 000 [	80
[6 000 - 8 000 [	40
Total :	1 000

TAB. 1.4 – Loyer des Appartements Parisiens

1. Tracer dans deux graphiques distincts l'histogramme et la fonction de répartition croissante associés à ce tableau.
2. Quel est l'intervalle modal ?
3. Quelle est la valeur de la fonction de répartition $F(x)$ pour $x = 3500$ euros ? Pour $x = 4500$ euros ? Pour $x = 5500$ euros ?
4. Calculer de manière exacte les quartiles Q_1, Q_2 et Q_3. Combien vaut l'écart inter-quartile ?
5. Tracer la boîte à moustache.

□

Exercice 8 : On a soumis à un stress 80 composants électroniques et on a mesuré le temps écoulé avant qu'ils ne tombent en panne. Les résultats exprimés en minutes sont les suivants :

2	0022444
2	6677788999
3	0002244444
3	666667777889999
4	0001122244
4	57779999
5	01222344
5	57799
6	0134
6	689

1. Comment s'appelle ce diagramme ?
2. Un temps donné en minutes, tel que 24min, signifie un temps réel compris entre 24min et moins de 25min. Quelles sont les distributions d'effectifs et de fréquences obtenues en découpant l'échelle des temps en intervalles consécutifs fermés à gauche et ouverts à droite, d'amplitude 5min chacun, le premier intervalle étant l'intervalle $[20, 25[$?
3. Tracer l'histogramme des fréquences associé à ce découpage. Quel est l'intervalle modal ?
4. Tracer la courbe des fréquences cumulées. Trouver graphiquement puis de manière exactes la médiane empirique et les quartiles de la distribution.
5. Tracer la boîte à moustache de cet échantillon.
6. Calculer la moyenne empirique ainsi que l'écart-type de cet échantillon en faisant le changement de variable $(T - 42,5)/5$.
7. Comparer la moyenne à la médiane.

□

1.2 Statistiques bivariées : Introduction

Exercice 1 : On considère le tableau de contingence suivant sur les variables X et Y

X \ Y	y_1	y_2	y_3
x_1	128	81	17
x_2	64	22	88

1. Déterminer n_{21}, $n_{1.}$ et $n_{.1}$, $n_{..}$.
2. Déterminer la distribution marginale f_Y et les distributions conditionnelles $f_{Y|X=x_1}$ et $f_{Y|X=x_2}$.

□

Exercice 2 : Une étude portant sur 1264 adolescents habitant l'état de Caroline du sud a été menée pour étudier les effets post-traumatique de l'ouragan Hugo, un an après ce cataclysme. Parmi d'autres variables on a relevé pour chaque adolescent son sexe (variable notée X), son âge (variable notée Y) et s'il revivait ou non l'évènement (variable notée Z).

1. La distribution du sexe et de l'âge des adolescents est la suivante :

sexe $X \setminus$ âge Y	[13-14[	[14-15[	[15-16[	[16-17[	[17-18[
fille	35	283	273	62	11
garçon	14	196	256	107	27

TAB. 1.5 – *Source : C.Z. Garrison, M.W. Weinrich, S.B. Hardin et al (1993), American journal of Epidemiology, 138, pp 522-530*

   (a) Donner les distributions marginales d'effectifs et de proportions (fréquences) calculées au 1000ème près du sexe.
   (b) Représenter la distribution de fréquence de l'âge à l'aide d'un histogramme. Hachurer chaque rectangle de manière à faire apparaître la proportion de filles et de garçons.
   (c) Calculer les moyenne, variance et écart-type marginaux de l'âge en identifiant chaque classe d'âge à son milieu et en utilisant le changement de variable $Y - 15,5$.
   (d) Calculer l'âge moyen des filles et l'âge moyen des garçons.

2. 161 filles et 82 garçons revivent l'évènement :
   (a) Donner le tableau de contingence des effectifs et des proportions des variables (X, Z).
   (b) Donner les distributions marginales d'effectifs et de proportions de la variable Z.
   (c) Donner la distribution de proportions de la variable Z dans la sous-population des filles.
   (d) Donner la distribution de proportions de la variable Z dans la sous-population des garçons.
   (e) Le fait de revivre l'évènement dépend-il du sexe des adolescents ? Calculer le χ^2.

□

Exercice 3 :[DS du 24 mars 2004] Une étude portant sur les habitudes tabagiques a été réalisée auprès de 2476 adolescents dans les établissements scolaires du département du Rhône.
Source : A.J. Sasco, D. Pobel, V. Benhaim et al 1993, Revue d'épidémiologie et de Santé Publique, 41, pp461-472

1. La répartition des habitudes tabagiques des adolescents est la suivante :

Habitudes	Nombre d'adolescents
fumeur habituel	515
fumeur occasionnel	794
non fumeur	1167

   (a) Quel est le type de la variable "habitudes tabagiques"
   (b) Quel est son mode ?
   (c) Quelle est la distribution de proportions (calculé au 100ème près) ?
   (d) Quelle est la proportion d'adolescent fumeur ?
   (e) Représenter cette distribution à l'aide d'un diagramme rectangulaire.

2. Il y 1152 filles et parmi les filles 234 sont fumeurs habituels et 537 sont non fumeurs. On note X la variable habitudes tabagiques et Y la variable Sexe (pour les questions suivantes vous calculerez les proportions au 1000ème près).
   (a) Donner la distribution d'effectifs et de proportions du couple (X, Y) ainsi que les distributions marginales de X et de Y.
   (b) Quelle est la distribution de proportions de la variable X dans la sous-population des filles ?
   (c) Quelle est la distribution de proportions de la variable X dans la sous-population des garçons ?
   (d) Les variables X et Y vous semblent-t-elles indépendantes ? Pourquoi ?
   (e) Calculer le χ^2 et conclure.
3. La répartition de l'âge des adolescents est donnée dans le tableau suivant :

âge	effectif
$[9, 11[$	12
$[11, 13[$	654
$[13, 15[$	1138
$[15, 17[$	650
$[17, 19[$	22

   (a) Quel est le type de la variable "âge" ? On note Z la variable "âge".
   (b) Représenter graphiquement la densité de proportion de l'âge
   (c) Représenter graphiquement sur l'histogramme, puis calculer la proportion d'adolescents ayant entre 12 et 15 ans.
   (d) Calculer les Quartiles de la distribution et tracer la boîte à moustache.
   (e) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de Z en utilisant le changement de variable $Z' = (Z - 14)/2$.
4. On dispose de l'âge et du nombre de cigarettes fumées par semaine (variable notée Y) de 275 garçons fumeurs habituels. Sachant que :

$\sum_{i=1}^{275} Z_i$	$\sum_{i=1}^{275} Y_i$	$\sum_{i=1}^{275} Z_i^2$	$\sum_{i=1}^{275} Y_i^2$	$\sum_{i=1}^{275} Y_i Z_i$
3882	4280	55268	4280	62850,2

   (a) Quel est l'âge moyen de ces garçons ?
   (b) Quel est le nombre moyen de cigarettes fumées par semaine ?
   (c) Caluler la covariance et la corrélation entre Z et Y.
   (d) Etablir l'équation de la droite de régression de Y sur Z.

□

1.3 Statistiques bivariées : Corrélation et Régression

Exercice 1 : Galilée, enseignant chercheur de l'université de Padua (Italie), a commencé vers l'âge de 31 ans à s'intéresser à la trajectoire des missiles (boulets de canon) afin d'en comprendre la cinématique. Pour cela il a construit divers instruments et réalisé diverses expériences. Les tableaux de la table 1.6 donne les résultats de deux de ses expériences.

Dans la première expérience une balle est lâchée sur un plan incliné et quitte le plan incliné à une certaine hauteur du sol, on mesure ensuite la distance parcourue par la balle. Dans la deuxième expérience, on rajoute un petit plat de manière a ce que la balle parte à l'horizontal avant d'atterrir.

1. Représenter par un nuage de point les deux expériences. On prendra comme variable Y la hauteur.
2. Proposer une modèle plausible pour la deuxième expérience : constuire une transformation des variables de départ permettant d'obtenir une relation linéaire entre X et Y.
3. Ajuster une droite de régression pour la deuxième expérience en considérant les données de départ puis votre modèle.

Gallilée a terminé ses expériences à 42 ans en découvrant les premières équations de la cinématiques.

Distance	Hauteur
573	1000
534	800
495	600
451	450
395	300
337	200
253	100

Distance	Hauteur
1500	1000
1340	828
1328	800
1172	600
800	300

TAB. 1.6 – *Résultats des deux expériences de Galilée*

□

Exercice 2 : Le tableau suivant représente pour différents pays, l'espérance de vie, le nombre de personnes par télévision, le nombre de personnes par médecin, l'espérance de vie des femmes et l'espérance de vie des hommes.

Argentina	70.5	4	370	74	67
Brazil	65	4	684	68	62
China	70	8	643	72	68
Egypt	60.5	15	616	61	60
France	78	2.6	403	82	74
India	57.5	44	2471	58	57
Iran	64.5	23	2992	65	64
Japan	79	1.8	609	82	76
Korea, North	70	90	370	73	67
Mexico	72	6.6	600	76	68
Myanmar(Burma)	54.5	592	3485	56	53
Peru	64.5	14	1016	67	62
Poland	73	3.9	480	77	69
Russia	69	3.2	259	74	64
Spain	78.5	2.6	275	82	75
Taiwan	75	3.2	965	78	72
Thailand	68.5	11	4883	71	66
Ukraine	70.5	3	226	75	66

$UnitedStates$	75.5	1.3	404	79	72
$Vietnam$	65	29	3096	67	63

Pour répondre aux questions suivantes, il est conseillé de réaliser un ou plusieurs changements de variables.

1. Existe-t-il une corrélation entre l'espérance de vie des hommes et l'espérance de vie des femmes ? Pourquoi ?
2. Existe-t-il une corrélation entre l'espérance de vie et le nombre de personnes par télévision ? Entre le nombre de personnes par télévision et le nombre de personnes par médecin ? Entre l'espérance de vie et le nombre de personnes par médecin ? Pourquoi ?

$\square$

Chapitre 2

Probabilité et Variables Aléatoires

2.1 Probabilités

2.1.1 Théorie des ensembles

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies, donner des contre-exemples pour les autres :

1. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
2. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$
3. $((A \cup B = \Omega) \wedge (A \cap B = \emptyset)) \Rightarrow (A = \overline{B})$
4. $(A \cup B = \Omega) \Rightarrow (A \subset \overline{B})$
5. $(A \cup B = \Omega) \Rightarrow (\overline{A} \subset B)$

□

2.1.2 Dénombrement

Exercice 2 : On considère un jeu de 32 cartes. Une main est composée de 8 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains d'une seule couleur ($\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit$) ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un as ?
3. Combien y a-t-il de mains contenant exactement deux as ?
4. Combien y a-t-il de mains contenant exactement trois as ?
5. Combien y a-t-il de mains contenant 2 carrés (un carré est un ensemble de 4 cartes de même hauteur) ?

□

Exercice 3 : Donner le nombre de mots de neuf lettres différents que l'on peut former avec l'ensemble des lettres suivant : $AEIOLNRST$. Même question avec les lettres : $EEEEBRRRV$.

□

Exercice 4 : Soient n, m, k, r des entiers positifs. Montrer les égalités :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{2.1}$$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0 \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = n2^{-n} \tag{2.5}$$

$$\binom{m}{k}\binom{n}{m} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{j} = \binom{n+1}{j+1} \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{j-k} = \binom{m+n}{j} \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \tag{2.9}$$

Pour chacune de ces égalités, on pourra essayer une des quatre méthodes différentes :
- en raisonnant par récurrence,
- à partir de la formule du binôme,
- à l'aide de la formule explicite reliant les coefficients binomiaux à la factorielle,
- par des raisonnements de type ensembliste.

□

Exercice 5 :

1. Pour quelle(s) valeur(s) de n a a-t-on $\binom{n}{3} = 220$?
2. Que vaut $\binom{n+1}{p}/\binom{n}{p}$?
3. Quel est le coefficient de x^5 dans $(x+2)^{12}$?

□

2.1.3 Évènements et probabilités

Exercice 6 : L'IUT ouvre 3 options facultatives A, B, C. On note A_n (respectivement B_n, C_n), l'événement "n étudiants s'inscrivent à l'option A (respectivement B, C)". Avec ces notations, écrivez les événements suivants :

1. Personne ne s'inscrit à la l'option A
2. 2 étudiants s'inscrivent à la l'option A et 1 étudiant à l'option B
3. 1 étudiant s'inscrit à l'option A , 1 étudiant s'inscrit à l'option B et personne à l'option C
4. Il y a moins de 3 étudiants inscrits dans chaque option.
5. Il y a plus de 3 étudiants inscrits dans chaque option.
6. Il y a plus de 3 étudiants inscrits dans au moins une option.
7. Il y a au moins 2 étudiants inscrits dans les options A et C et au moins un étudiant inscrit à l'option B

□

Exercice 7 : A l'IUT, la probabilité pour que l'étudiant X en première année abandonne est de 1/5 et la probabilité pour que l'étudiant Y de deuxième année abandonne est de 1/8. En supposant les deux événements indépendants, calculer la probabilité que :

1. X et Y abandonnent l'IUT

2. Ni X, ni Y ne quittent l'IUT
3. Y seulement quitte l'IUT
4. L'un des deux quitte l'IUT

$\square$

Exercice 8 : Une enquête effectuée auprès d'un grand nombre d'étudiants de l'IUT du département informatique a permis d'estimer qu'il y a une probabilité de $0,7$ pour qu'un étudiant soit intéressé par l'informatique, $0,4$ pour qu'il soit intéressé par les mathématiques, et $0,25$ pour qu'il soit intéressé par ces deux matières. Quelle est le probabilité qu'un étudiant :

1. soit intéressé par l'info et pas par les maths,
2. soit intéressé par l'info ou par les maths,
3. ne soit intéressé ni par l'info ni par les maths (mais que fait-il là ?).

$\square$

Exercice 9 : Un groupe de l'IUT comporte 10 garçons dont la moitié a les yeux marron et 20 filles dont la moitié a également les yeux marron. Calculer la probabilité p qu'un élève choisi au hasard soit un garçon ou ait les yeux marrons. Les événements "élève est un garçon" et "élève a les yeux marron" sont-ils indépendants ?

$\square$

Exercice 10 : A l'IUT, un composant électronique sert à déclencher l'alarme si une condition extraordinaire se présente. Ce composant est fiable a 96%. On envisage de mettre un certain nombre de ces composants en parallèle pour augmenter la fiabilité du système d'alarme. Combien de composants doit-on placer en parallèle de telle sorte que la fiabilité du système soit d'au moins 99.99% ?

$\square$

Exercice 11 : On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Quel est l'ensemble des résultats possibles ? Trouver un univers Ω et une probabilité P permettant de modéliser l'expérience. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir exactement une fois "face" ?
2. d'obtenir au moins une fois "face" ?
3. d'obtenir "pile" au premier tirage puis au moins une fois "face" dans les deux suivants ?
4. d'obtenir "pile" au premier tirage ou "face" au troisième tirage ?

$\square$

2.1.4 Probabilités Conditionnelles

Exercice 12 : Le responsable informatique de l'IUT sait qu'un individu essayant d'accéder à l'intranet en composant au hasard un mot de passe de 3 chiffres est refoulé 999 fois sur 1000.

1. Sachant que le serveur accepte 3 essais de mot de passe avant de couper la connexion, quelle est la probabilité de se connecter par hasard ? Pour répondre à cette question, vous considérerez que les essais se font avec remises puis sans remises.
2. Généraliser au cas de n essais possibles.

$\square$

Exercice 13 :[Le paradoxe des 3 prisonniers] Trois otages A, B et C savent que l'un d'entre eux va être exécuté et que les deux autres vont être relachés. Seul le gardien sait lequel des trois sera exécuté.

Au milieu de la nuit, le prisionner A appelle le gardien et lui demande "Peux tu donner cette lettre pour ma famille à un de mes compagnons ? Au moins l'un d'entre eux doit être relaché demain." Le garde accepte et prend la lettre.

Une heure plus tard, le prisonnier rappelle le gardien et lui demande "Peux tu me dire à qui tu as donné la lettre ?" Le gardien lui répond "je l'ai donnée au prisonnier B".

Le prisonnier retourne dans se coucher et se fait la remarque suivante "Avant de demander au gardien à qui il avait donné la lettre, j'avais une chance sur trois d'être éxécuté demain, maintenant je n'ai plus qu'une chance sur deux."

1. A votre avis le prisonnier A a t'il une chance sur deux ou sur trois d'être éxécuté ?
2. Vérifier (ou infirmer) votre intuition en faisant un calcul de probabilité.
3. Supposons que pour une raison "x" ou "y" le gardien ne veuille pas donner la lettre au prisonnier B si cela est possible. Que devient votre calcul précédent ?

□

Exercice 14 :[Le paradoxe de Monty Hall] Monty Hall propose le jeux télévisé suivant : un candidat doit choisir entre trois portes de garages fermées. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les autres portes se trouvent une chèvre. Lorsque le candidat a choisi une porte, Monty ouvre une des deux portes restantes pour faire apparaitre une chèvre (ce qui est possible). Il propose ensuite au candidat de rester devant la porte qu'il a choisi ou de changer.

1. A votre avis le candidat doir il rester ? changer ? cela n'a pas d'importance ?
2. Vérifier (ou infirmer) votre intuition en faisant un calcul de probabilité.

□

Exercice 15 : On dispose d'une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires, on tire successivement n boules. Calculer la probabilité de l'événement A_k : "On a tiré k boules blanches et $n-k$ boules noires" pour les deux types de tirages (en indiquant les valeurs possibles pour n et k) :

1. Tirages avec remise. (Indication : on peut numéroter les boules blanches de 1 à N_1, et les boules noires de N_1+1 à $N = N_1 + N_2$. L'univers $\Omega = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in \{1, 2, ...N\}\}$ est muni de l'équiprobabilité.)
2. Tirages sans remise.

Application numérique : $N_1 = 2$, $N_2 = 3$, $n = 2$.

□

Exercice 16 : Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire n foix une boule. A chaque tirage, si on a tiré une boule blanche on remet deux boules blanches, si on tire une boule noire, on remet deux boules noires. On note N_n l'événement "on tire une boule noire à l'étape n" et $F_{m,n}$ l'événement "l'urne contient m boules noires à l'étape n".

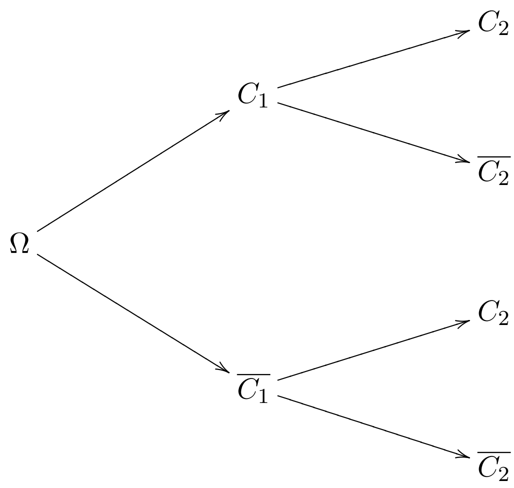
1. Quelle est le nombre de boules que contient l'urne après n tirage ?
2. Montrer que $P(F_{m,2}) = 1/3$ pour $m = 1, 2, 3$.
3. Montrer par récurrence que $P(F_{m,n}) = 1/(n+1)$ pour $m = 1, 2, \ldots n+1$.

□

Exercice 17 :[Probabilité du maximum] On dispose d'une urne contenant $m+k$ boules numérotées $f_1 > f_2 > f_3 > \ldots > f_{m+k}$ s(f_1, f_2, $\ldots$, f_{m+k} sont des nombres quelconques, $m \geq 1$ et $k \geq 1$ sont des entiers).

1. On suppose que $k = 1$. On tire au hasard une boule et on note C_1 l'événement "La boule choisie porte le numéro f_1". Quelle est $P(C_1)$?
2. On suppose que $k = 2$. On tire au hasard **sans remise** 2 boules. Soit C_1 l'événement "La première boule choisie porte le numéro f_1" et C_2 l'événement "La deuxième boule choisie porte le numéro f_1" Complétez le graphe en indiquant les probabilités sur chacune des

arètes



3. En déduire $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2})$.
4. On suppose désormais que k est quelconque. On choisit au hasard **sans remise** k boules. On note C_i l'événement "La ième boule choisie porte le numéro f_1". Quelle est $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \ldots \cap \overline{C_k})$?

□

Exercice 18 :[Utilisateur impatient] Soit une fonction f de $\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$. Etant donné un mot binaire $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de longueur n, un utilisateur possède un programme qui permet de calculer $f(\mathbf{x})$ en une seconde. Si deux mots $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_l$ sont différents, les résultats $f(\mathbf{x}_k)$ et $f(\mathbf{x}_l)$ calculés par le programme seront différents. En particulier il existe un mot qui maximise la fonction f : c'est le mot recherché par l'utilisateur. Malheureusement, ce mot peut être n'importe lequel des N mots possibles. La méthode du calcul de $f(\mathbf{x})$ est ignorée de l'utilisateur du programme.

1. Combien existe t'il de mots binaires différent de longueur n ? On notera N ce nombre.
2. En supposant que l'utilisateur essaie tous les mots, au bout de combien de temps connaitra t'il avec certitude le mot qui maximise f lorsque $n = 16$? $n = 65536$? (on pourra prendre commme approximation 64s $\simeq$ 1min et 64min $\simeq$ 1h.)

   Un utilisateur impatient décide pour trouver le meilleur mot d'appliquer la stratégie suivante :
   - Il fait évaluer par le programme m mots.
   - Il teste ensuite séquentiellement les autres mots Si un mot donne un meilleur résultat que les m premiers, il arrète son investigation et conserve ce mot comme solution. Si au bout de M essais, il n'a pas trouvé de mot meilleur, il conserve le meilleur des m premiers mots.

   Cette stratégie lui permet d'obtenir le meilleur mot en un temps limité avec une certaine probabilité. Le reste de l'exercice consiste à trouver la valeur de m qui donne la meilleure probabilité.

   Soit E_i l'événement "le meilleur mot est à la place i".
3. Quelle est $P(E_i)$?
4. Soit E l'événement, "l'utilisateur trouve le meilleur mot". Les réponses aux questions suivantes sont immédiates :
   (a) Si $i > M$, Quelle est $P(E|E_i)$?
   (b) Si $i \leq m$, Quelle est $P(E|E_i)$?
   (c) Si $i = m + 1$, Quelle est $P(E|E_i)$?
   Les réponses aux questions suivantes sont données par l'exercice précédent
   (d) si $i = m + 2$, $P(E|E_i) =$

(e) si $i = m + k + 1 \leq M$, $P(E|E_i) =$

5. En utilisant la formule $P(E) = \sum_{i=1}^{N} P(E|E_i)P(E_i)$ montrer que

$$P(E) = \frac{m}{N} + \frac{m}{N} \sum_{i=m}^{M-1} \frac{1}{i}$$

   (a) En comparant la série $\sum \frac{1}{i}$ avec une intégrale montrer que $P(E) \geq \frac{m}{N}(1 + \ln(M) - \ln(m))$.

   (b) Etudier la fonction $x \to \frac{x}{N}(1+\ln(M)-\ln(x))$ et trouver le point x où elle est maximale.

   (c) En déduire le meilleur choix de m, une stratégie plus simple, et la probabilité que l'utilisateur trouve le meilleur mot.

6. On suppose que l'utilisateur doit décider immédiatement si il conserve le mot ou si il teste un nouveau mot : si au bout de M essais il n'a pas trouvé de meilleur mot, il doit abandonner.

   Reprendre les questions précédentes avec cette nouvelle contrainte.

□

2.1.5 Formule de Bayes

Exercice 19 : A l'IUT, parmi les étudiants 40% suivent l'option A_1 40%, 30% suivent l'option A_2 et 30% suivent l'option A_3. La proportion d'étudiant qui n'ont pas la moyenne dans l'option A_1 est de 10%, dans l'option A_2 de 5% et dans l'option A_3 de 5%. On choisit un étudiant au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'il n'ait pas la moyenne.

2. Sachant qu'il n'a pas la moyenne, calculer la probabilité a posteriori qu'il ait suivi l'option A_1, A_2 ou A_3.

□

Exercice 20 : L'IUT délivre 5 diplomes.
- 10% des étudiants sont en "Biologie" (B_1), parmi eux 20% échouent
- 30% des étudiants sont en "Informatique" (B_2), parmi eux 10% échouent
- 10% des étudiants sont en "Chimie" (B_3), parmi eux 10% échouent
- 20% des étudiants sont en "Mesures physiques" (B_4), parmi eux 20% échouent
- 30% des étudiants sont en "GEII" (B_5), parmi eux 30% échouent

On choisit un étudiant au hasard. Soit A l'évènement "l'étudiant échoue".

1. Déterminer $P(A)$

2. Déterminer la probabilité à posteriori $P(B_i|A)$, pour $i = 1, \ldots, 5$.

□

Exercice 21 : Dans une ville, un tiers des habitants soutiennent le parti D : parmi eux 80% sont favorables au curé, 20% au maire, 90% sont pour la prohibition de l'alcool, 10% contre cette prohibition, et leurs opinions à l'égard d'une part, de ces personnalités, d'autre part, de l'alcool sont indépendantes. parmi ceux qui soutiennent le parti G, au contraire, qui regroupe les deux tiers des habitants, 70% sont favorables au maire, 30% au curé, 20% sont pour la prohibition de l'alcool, 80% contre ; et chez eux également il y a indépendance entre ces opinions.

Un individu se déclare favorable au maire et ennemi de l'alcool. Avec quelle probabilité soutient il le parti D ?

□

2.2 Variables aléatoires discrètes

2.2.1 Introduction

Exercice 1 : Déterminer la loi de probabilité, le mode, l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire discrète X dont la fonction de répartition est donnée par

$$\begin{cases} F(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ F(t) = 1/5 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ F(t) = 4/5 & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ F(t) = 1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Représenter la loi de X ainsi que sa fonction de répartition.

□

Exercice 2 : La loi de la v.a. X est donnée par le tableau suivant

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0, 25	p_2	0, 18	p_4	0, 37

1. Déterminer les valeurs de p_2 et p_4 sachant que les événements $\{X = 2\}$ et $\{X = 4\}$ sont équiprobables.
2. Représenter graphiquement la loi.

□

Exercice 3 : Un dé est pipé de telle sorte que la probabilité d'obtenir k soit proportionnelle à k. Soit X le numéro obtenu quand on fait un lancer.

1. Déterminer la loi de X et donner sa représentation graphique.
2. Déterminer la fonction de répartition de X et donner sa représentation graphique.

□

Exercice 4 : Deux joueurs A et B lancent chacun une pièces de monnaie. Si les deux pièces tombent sur pile, A gagne, sinon B gagne 2 francs. Un jeu est équitable si l'espérance de gain de chaque joueur est nulle. Combien doit gagner A pour que le jeu soit équitable ?

□

Exercice 5 : Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 1$ et $V(X) = 5$. Calculez $\mathbb{E}\left[(2 + X)^2\right]$ et $V(4 + 3X)$.

□

2.2.2 Lancer de dés

Exercice 6 : On lance un dé et on note X le numéro obtenu.

1. Determiner la loi de X, $\mathbb{E}[X]$ et $V(X)$.
2. Déterminer la loi de $Y = 1/X$ et son espérance.
3. Déterminer l'espérance de $Z = (X - 3)$ sans utiliser la loi Z.
4. Déterminer la loi de Z.
5. déterminer l'espérance de Z en utilisant la loi de Z

□

Exercice 7 : On fait rouler un dé à k faces avec les nombres 1 à k sur ses faces deux fois. On note X_1 et X_2 les nombres obtenus.

1. Quelle est $\mathbb{E}[X_1]$? $\mathbb{E}[X_2]$?
2. Quelle est la loi de $\min(X_1, X_2)$? de $\max(X_1, X_2)$?
3. Quelle est $\mathbb{E}[\min(X_1, X_2)]$? $\mathbb{E}[\max(X_1, X_2)]$?

4. Montrer que $\mathbb{E}[\min(X_1, X_2)] + \mathbb{E}[\max(X_1, X_2)] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]$.
5. Expliquer pourquoi le résultat précédent est vrai sans faire de calcul.

□

Exercice 8 : On fait rouler deux dés à 6 faces. On note X_1 et X_2 les nombres obtenus et $X = X_1 + X_2$ la somme des deux nombres obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? $\mathbb{E}[X]$? $V(X)$?
2. Quelle est la loi de X conditionnelle à l'événement $\{X_1 = k\}$, $k = 1, \dots 6$?
3. Quelle est $\mathbb{E}[X_1|X = k]$? En déduire la loi de la variable aléatoire $Z = \mathbb{E}[X_1|X]$.
4. Déterminer sans la loi de Z son espérance. Vérifier votre résultat par le calcul.
5. Mêmes questions pour les variables aléatoires $\mathbb{E}[X_1 - X_2|X]$ et $\mathbb{E}[X|\{X_1 \text{ est pair}\}]$.

□

Exercice 9 : Le jeu du loto consiste à deviner les 6 entiers qui vont être tirés au hasard parmi les entiers $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$.

1. Comment modéliser le tirage de ces 6 entiers ? (On explicitera un univers Ω dont on donnera le cardinal, ainsi qu'une probabilité P sur Ω.)
2. Calculez les probabilités des événements suivants :
   - A_k : “avoir deviné exactement k bons numéros”, $k = 0, \dots 6$.
   - E : “avoir zéro, un ou deux bons numéros”.
   - G : “ avoir au moins trois bons numéros”.
3. Au tirage du loto du mercredi 07 février 1990, il fallait jouer les numéros 4, 8, 21, 23, 42, 49. Avec 6 (respectivement 5, 4, 3) bons numéros, le gain était de 4 300 000 (respectivement 6 800, 120, 9) Francs. Pour un jeu simple de 1 Franc, calculez l'espérance de votre gain.

□

2.2.3 Loi Binomiale

Exercice 10 : On tire avec remise 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit X le nombre de reines obtenues.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 11 : A l'IUT les étudiants réalisent des programmes dont 1/3 ne fonctionnent pas. Un TP consiste à réaliser 9 programmes. Soit X la variable aléatoire "Nombre de programmes ne fonctionnant pas". Donner la loi de probabilité de X et calculer le nombre moyen de programmes ne fonctionnant pas par TP.

□

2.2.4 Loi géométrique

Exercice 12 : Reprendre l'exercice sur le nombre d'essais nécessaires pour accèder au réseau informatique de l'IUT. Soit X le nombre d'essais nécessaires pour accéder au réseau.

1. Quelle est la loi de probabilité de X dans le cas sans remise, avec remise ?
2. Calculer $P(X = k)$ dans chaque cas.
3. Combien faudrait il d'essais en moyenne pour accéder au serveur par hasard dans chaque cas ?

□

Exercice 13 : Alice et Bob ont décidé d'avoir des enfants juesqu'à ce qu'ils aient une fille ou bien qu'ils aient $k \geq 1$ enfants. On suppose que chaque enfant a une probabilité 1/2 d'être un garçon et qu'il n'y a pas de naissances multiples.

1. Quelle est l'espérance du nombre de garçons qu'auront d'Alice et Bob ?
2. On suppose maintenant qu'il ne s'impose pas de limite, en supposant que c'est possible, que devient l'espérance du nombre de garçons qu'ils auront ?

□

Exercice 14 : On considère un système constitué d'un processeur et d'une file d'attente. Un programme arrivant sur le processeur est exécuté pendant un certain intervalle de temps. Au bout de cet intervalle de temps, on teste s'il est achevé. S'il n'est pas achevé, les variables d'exécution sont sauvegardées et le programme est remis dans la file d'attente.

L'expérience a montré qu'un programme a une probabilité p de s'achever lors d'un passage et a donc une probabilité $(1-p)$ de retourner dans la file d'attente.

1. Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de passages nécessaires au programme avant de s'achever. Quel est la loi de probabilité de N ?
2. Quelle est l'espérance du nombre d passage de N ?
3. Un deuxième programme ne peut s'exécuter que lorsque le premier programme est achevé. Soit M le nombre de passages de ce deuxième programme et soit $S = N + M$ le nombre de passage des deux programmes. On suppose que M et N sont indépendants.
   (a) Quelles valeurs peut prendre S ?
   (b) Montrer que $P(S = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$ pour $n \geq 2$. Pour répondre à cette question, on pourra observer que l'événement $\{M + N = n\}$ peut se décomposer sous la forme :
   $$\{M+N = n\} = \{M = 1, N = n-1\} \cup \{M = 2, N = n-2\} \cup \ldots \cup \{M = n-1, N = 1\}$$
   C'est à dire que soit $M = 1$ et $N = n-1$, soit $M = 2$ et $N = n-2$,...
4. Le système possède désormais deux processeurs qui permettent d'exécuter deux programmes en parallèle. Un utilisateur du système lance un programme sur chaque processeur. Soit M le nombre de passage du 1er programme et soit N le nombre de passage du deuxième programme. L'utilisateur doit attendre que l'un des deux programmes ait fini pour pouvoir exécuter un troisième programme. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de passages nécessaires avant le lancement du troisième programme.
   (a) Calculer $P(M = N)$.
   (b) Calculer $P(Y = n)$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
5. L'utilisateur du système doit désormais attendre que les deux programmes ait fini pour pouvoir exécuter un troisième programme. Soit Z la variable aléatoire donnant le nombre de passages nécessaires avant le lancement du troisième programme.
   (a) Quelles valeurs peut prendre Z ?
   (b) Calculer $P(Z = n)$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}[Z]$.

□

2.2.5 Loi de poisson

Exercice 15 : Le directeur des ventes de chez G.A.G a constaté que le nombre N de voitures vendues toutes les heures par G.A.G. suit une loi de poisson de paramètre 4. Calculer la probabilité que dans une heure donnée :

1. On ne vende aucune voiture
2. On vende 4 voitures
3. On vende au moins une voiture
4. Le nombre de voitures vendues soit compris (au sens large) entre 2 et 6.
5. Quelle est l'espérance de N ? Sa variance ? Les prix de vente des modèles de $G.A.G.$ sont les suivants (Voir exercice 2.2.5) :

"Louvo"	"Poulo 3 portes"	"Poulo 5 portes"	"Toussat break"	"Toussat berline"
8000	10000	12000	20000	16000

TAB. 2.1 – *Tarif des ventes*

Soit G la variable aléatoire CA réalisé en une heure.

(a) Calculer le CA moyen par heure de l'entreprise G.A.G.

(b) Quel est son écart-type ?

□

Exercice 16 : Soient X et Y variables aléatoires de loi de Poisson de paramètre λ et μ. Calculer la loi de $Z = \max(X, Y)$ et la comparer a la loi de $X + Y$.

□

2.2.6 Couples de variables aléatoires

Exercice 17 : Soient X et Y variables aléatoires à valeur dans $\{1, 2\}$ dont la loi du couple est définie par :

$$\begin{aligned} P(X=1,Y=1) &= P(X=2,Y=2) = a \\ P(X=1,Y=2) &= P(X=2,Y=1) = \frac{1}{2} - a \end{aligned}$$

avec a réel $0 < a < 1$.

1. Déterminer la loi de X, de Y, conclure.
2. Quelle est la loi de $X + Y$?

□

□

2.3 Variables Aléatoires Normale

Exercice 1 : Une variable aléatoire normale X a pour espérance 4 et pour variance 9.

1. Calculer, avec 4 décimales : $P(X < 7)$, $P(X > 3)$, $P(-2 < X \leq 10)$, $P(X \in [-8, 12])$.
2. Soit $Y = -7X + 9$, Y suit elle une loi normale ?
3. Donner $P(Y < -21)$ et $P(-20 \leq Y \leq 20)$
4. Donner les quartiles de X, en déduire ceux de Y.

□

Exercice 2 : Soit X une variable aléatoire de loi $N(3.5, 0.1^2)$

1. déterminer le nombre a tel que : $P(3.5 - a \leq X \leq 3.5 + a) = 0.95$
2. déterminer le nombre b tel que : $P(3.5 - b \leq X \leq 3.5 + b) = 0.99$

□

Exercice 3 : Déterminer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire de loi normale X, sachant que :

$$P(X \geq 5) = 0.8413 \text{ et } P(X \leq 10) = 0.8770$$

□

Exercice 4 : La taille d'une femme française suit une loi normale de moyenne 167cm et d'écart-type 5cm.

1. Quelle est la proportion de femmes ayant une taille supérieure à 1m70 ?
2. Quelle est la proportion de femmes ayant une taille inférieure à 1m60 ?
3. Quelle est la proportion de femmes ayant une taille comprise entre 1m63 et 1m69 ?
4. Pour une place de pilote d'avion, 50 femmes ont postulée et 23 ont été refusées parce qu'elles étaient trop grandes et 2 ont été refusées parce qu'elles étaient trop petites.
   (a) Calculer le pourcentage de femmes refusées parce qu'elles étaient trop grandes et celui des femmes refusées parce qu'elles étaient trop petites.
   (b) En supposant que l'on obtiendrait des résultats identiques (en proportion) en considérant l'ensemble des femmes françaises, donner la taille minimale et la taille maximale imposées pour être pilote d'avion.

□

Exercice 5 :[DS du 10 juin 2004]

1. Une machine automatique fabrique des gobelets dont la contenance en centilitres X suit une loi $\mathcal{N}(25, 1)$. Les gobelets contenant moins de 23cl et ceux contenant plus de 27cl sont mis au rebut. La machine fabrique 100000 unités par jour.
   (a) Combien y a-t-il en moyenne de gobelets mis au rebut ?
   De manière à contrôler la fabrication on prélève tous les matins un échantillon de 4 gobelets. On calcule la moyenne empirique $\bar{X}$ et on décide de régler la machine si $\bar{X}$ est plus petit que T_{inf} ou supérieur à T_{sup}.
   T_{inf} et T_{sup} sont des tolérances qu'il vous faudra déterminer dans les questions suivantes en utilisant deux stratégies. On vous rappelle que si un échantillon de variables aléatoires X_i suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors la moyenne empirique $\bar{X}$ de l'échantillon suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.
   (b) i. On veut que lorsque la machine est bien réglée, la probabilité de décider d'un réglage soit inférieur à 0,05. Combien valent T_{inf} et T_{sup} ?
   ii. On suppose que la machine est déréglée et que $\mu = 24$, quelle est la probabilité de décider un réglage avec ces deux tolérances ?
   (c) Le responsable de fabrication peut accepter un rebut de 10% au maximum. Pour les questions suivantes vous pourrez illustrer la situation à l'aide d'un schéma comme ceux vu en contrôle de qualité avec StatGraphics.
   i. Chercher une valeur μ_{inf} telle que si $\mu \leq \mu_{\text{inf}}$ alors la proportion de gobelets défectueux est supérieure à 10%.
   ii. Chercher une valeur μ_{sup} telle que si $\mu \geq \mu_{\text{inf}}$ alors la proportion de gobelets défectueux est supérieure à 10%.
   iii. On suppose que $\mu = \mu_{\text{inf}}$, on veut trouver T_{inf} tel que la probabilité de ne pas régler la machine dans ce cas soit inférieure à $0,05$. Combien vaut T_{inf} ?
   iv. On suppose que $\mu = \mu_{\text{sup}}$, on veut trouver T_{sup} tel que la probabilité de ne pas régler la machine dans ce cas soit inférieur à $0,05$. Combien vaut T_{sup} ?
   (d) Comparer les deux types de réglages.

□

2.4 Variables aléatoires continues

Exercice 1 : La durée de vie (en seconde) d'un circuit électronique soumis à un stress est une variable aléatoire X vérifiant $P(X < t) = 1 - e^{-t/1000}$ (loi exponentielle de paramètre 1/1000).

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Quels sont les quartiles de X ?

□

Exercice 2 : Soit X_1 et X_2 la durée de vie de deux composants. On suppose que ces deux composants suivent la même loi $\mathcal{E}(1/1000)$.

1. Si ces composants sont montés en série, quelle est la loi de la durée de vie du circuit électronique ? (On suppose que les deux composants fonctionnent indépendemment l'un de l'autre)
2. Même question si ces composants sont montés en parallèle.
3. Calculer la durée de vie moyenne du circuit dans le premier cas, dans le deuxième cas.
4. Généraliser au cas de n composants.

□

Exercice 3 : Soit X une variable aléatoire $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Quelle est la loi de probabilité de $\sqrt{|X|}$?
2. Montrer que la loi de probabilité de X^2 est une loi $\gamma(1/2, 1/2)$? (que l'on note $\chi^2(1)$: loi du χ^2 à 1 degré de liberté).

□

2.4.1 Introduction à la fiabilité

Exercice 4 : Soit T une v.a. positive telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P(T > t)$ ne soit pas nulle. Supposons que $P(T > s+t|T > t) = P(T > s)$, montrer que la loi de T est une loi exponentielle. Expliquer pourquoi ce résultat peut être utile pour modéliser la durée séparant deux pannes d'une machine ou deux arrivées de clients à un guichet.

□

Exercice 5 : Une machine tombe en panne à un instant aléatoire T v.a. positive de loi F ayant la densité continue f. Si, à un instant t, la panne ne s'est pas produite, le risque de panne immédiate se mesure par le **taux de panne**

$$h(t) = \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} P(t < T \leq t + u|T > t)$$

1. Calculer $h(t)$ en fonction de f (dés que $P(T > t)$ n'est pas nul). Que vaut h pour une loi exponentielle ? Prouver en posant $\Lambda(t) = \int_0^t h(s)ds$ que $P(T > t) = e^{-\Lambda(t)}$
2. On dit qu'il y a usure lorsque h croît et rodage lorsque h décroît. On suppose que T suit une loi $\gamma(a, \lambda)$. Étudier s'il y a usure ou rodage selon les valeurs de a. Prouver que $\lambda = \lim_{t \to +\infty} h(t)$: c'est ce qu'on appelle le taux de panne asymptotique.
3. On utilise souvent dans ce cadre la loi de Weibull $\mathcal{W}(a\lambda)$, son taux de panne est $t \to a\lambda^a t^{a-1}$. Quand y-a-t'il usure ou rodage ?
4. Si on a deux composants indépendants montés en parallèle de loi $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}(\lambda_2)$, montrer qu'il y a d'abord usure puis rodage (sauf dans le cas $\lambda_1 = \lambda_2$).

□

Exercice 6 :[DS du 15 juin 2004] La loi de Pareto de paramètres (a, α), ($a > 0$ et $\alpha > 0$) est la loi dont la densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{a}(\frac{a}{x})^{\alpha+1} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de Pareto de paramètre (a, α). Notons f_X sa densité.

1. – Montrez que f_X est bien une densité.
   – Montrez que la fonction de répartition de X est donnée par :

   $$P(X < t) = \begin{cases} 1 - (\frac{a}{t})^{\alpha} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

   – En distinguant les cas $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha \leq 1$, calculez l'espérance de X.
2. Le temps de réaction (exprimé en secondes) d'un détecteur de mouvement suit une loi de Pareto de paramètres $(1, 2)$.
   – Quelle est la probabilité que le détecteur réagisse en moins de 2 secondes ?
   – Quelle est la probabilité que le détecteur réagisse en moins d'une demi-seconde ?
   – Quelle est la probabilité que le détecteur réagisse entre la deuxième et la troisième seconde ?
   – Au bout de combien de temps y aura-t'il 99% de chance que le détecteur ai réagi ?
   – Quel est le temps moyen de réaction du détecteur ?
3. Une alarme est munie de deux détecteurs dont les temps de réaction X_1 et X_2 respectifs suivent des lois de Pareto de paramètres (a, α_1) et (a, α_2) respectivement. Dans un premier cas de figure, l'alarme se déclenche dés que **l'un des deux détecteurs** a réagi. Notons Y le temps de réaction de l'alarme.
   – Exprimez Y en fonction de X_1 et X_2.
   – En déduire la fonction de répartition de Y.
   – En déduire que la densité de Y vérifie $f_Y = f_{X_1} + f_{X_2} - f_Z$ ou Z est une variable aléatoire de paramètre $(a, \alpha_1 + \alpha_2)$.
   – Quel est l'espérance de Y ?
4. Dans un second cas de figure, l'alarme se déclenche dés que **les deux détecteurs** ont réagi. On note Z le temps de réaction de l'alarme.
   – Exprimez Z en fonction de X_1 et X_2.
   – Exprimez $P(Z > t)$ en fonction de $P(X_1 > t)$ et de $P(X_2 > t)$.
   – En déduire la fonction de répartition de Z.
   – En déduire que Z suit une loi de Pareto de paramètre $(a, \alpha_1 + \alpha_2)$.

□